Lie-Algebren **WiSe 2015/16**
2. Übungsblatt **Dr. Thorsten Weist**
Abgabe bis Mittwoch, 11.11.2015 **Dr. Magdalena Boos**
(in der Vorlesung oder Übung)

Aufgabe 1. (6 Punkte)
Es seien A und B kommutierende diagonalisierbare Matrizen in $M_n(\mathbf{C})$.

a) Zeigen Sie, dass A und B simultan diagonalisierbar sind, d.h. dass es eine invertierbare Matrix g gibt, so dass gAg^{-1} und gBg^{-1} Diagonalmatrizen sind. (*Tipp:* Untersuchen Sie dazu die Aktion von B auf den Eigenräumen von A.)

b) Folgern Sie, dass die Summe und die Differenz von A und B wieder diagonalisierbar sind.

Aufgabe 2. (6 Punkte)
Es sei $A \in M_n(\mathbf{C})$ eine Matrix in Jordan-Normalform, d.h. A hat Diagonalblöcke $J_{\lambda_i}(m_i)$ für $i = 1, ..., k$, wobei $J_\lambda(m)$ ein $m \times m$-Jordanblock mit Diagonaleinträgen $\lambda \in \mathbf{C}$ bezeichnet. Es sei B die Diagonalmatrix aller Diagonaleinträge von A und $C := A - B$.

Zeigen Sie, dass $A = B + C$ die Jordan-Zerlegung von A ist.

Aufgabe 3. (6 Punkte)
Es seien $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ ein Ideal, so dass $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ nilpotent ist und so dass $\mathrm{ad}(x \mid_{\mathfrak{h}})$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ nilpotent ist.

Zeigen Sie, dass $\mathfrak{g}$ nilpotent ist.

Aufgabe 4. (6 Punkte)
Berechnen Sie für die folgenden Lie-Algebren jeweils die abgeleitete Reihe und die absteigende Zentralreihe:

a) $\mathfrak{g}$ mit Basis x, y und Strukturkonstanten definiert durch $[x, y] = y$.

b) $\mathfrak{g}$ mit Basis x, y, z und Strukturkonstanten definiert durch $[x, y] = z$, $[x, z] = y$ und $[y, z] = 0$.

c) $\mathfrak{g}$ mit Basis h, x, y und Strukturkonstanten definiert durch $[h, x] = y$, $[h, y] = -x$ und $[x, y] = h$.