Lie-Algebren **WiSe 2015/16**
12. (und letztes) Übungsblatt **Dr. Thorsten Weist**
Abgabe bis Mittwoch, 1.2.2016 **Dr. Magdalena Boos**
(in Vorlesung oder Übung)

Aufgabe 1. (6 Zusatzpunkte) Es seien $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra und $\alpha, \beta \in \Phi$ zwei lineare unabhängige Wurzeln bezüglich einer Cartan-Unteralgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$. Es seien die natürlichen Zahlen r_{min} und r_{max} wie in der Vorlesung definiert.
Zeigen Sie:

a) Es gilt genau dann $\beta + r \cdot \alpha \in \Phi$, wenn $r_{\text{min}} \leq r \leq r_{\text{max}}$.

b) Es gilt $\langle \beta, \alpha \rangle = -r_{\text{min}} - r_{\text{max}}$.

c) Der α-Faden durch β ist höchstens 4-elementig.

Aufgabe 2. (6 Zusatzpunkte) Zeigen Sie, dass die Vereinigung von endlich vielen Hyperflächen eines euklidischen Vektorraums V immer eine echte Teilmenge von V ist.

Aufgabe 3. (6 Zusatzpunkte) Es sei (E, Φ) ein Wurzelsystem.
Zeigen Sie:

a) (E, Φ) ist genau dann irreduzibel, wenn (E, Φ) keine disjukte Vereinigung von zwei Wurzelsystemen ist, das heißt, wenn es keine direkte Summenzerlegung $E = E_1 \oplus E_2$ sowie keine disjunkte Vereinigung $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ gibt, so dass (E_1, Φ_1) und (E_2, Φ_2) Wurzelsysteme sind.

b) (E, Φ) ist genau dann irreduzibel, wenn im zugehörigen Dynkin-Diagramm alle Punkte verbunden sind (das bedeutet, dass für je zwei Punkte ein Weg aus Kanten existiert, der beide Punkte verbindet).
Bemerkung: Das Dynkin-Diagramm heißt dann zusammenhängend.

Aufgabe 4. (6 Zusatzpunkte) Es sei auf dem $\mathbf{R}^n$ eine Bilinearform definiert durch

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 2, & \text{falls } i = j, \\ -1, & \text{falls } \mid i - j \mid = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

a) Die Bilinearform $(\_, \_)$ ist positiv definit.

b) Die Menge
$$\Phi := \{\pm v_{i,j} \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}$$
ist für $v_{i,j} := e_i + e_{i+1} + ... + e_j$ und bezüglich des Skalarprodukts $(\_, \_)$ ein Wurzelsystem.