Lie-Algebren | **WiSe 2015/16**
1. Übungsblatt | **Dr. Thorsten Weist**
Abgabe bis Mittwoch, 4.11.2015 | **Dr. Magdalena Boos**
(in der Vorlesung oder in der Übung)

Aufgabe 1. (6 Punkte)
Es sei $\langle \_, \_ \rangle$ eine Bilinearform auf dem Vektorraum $\mathbf{C}^n$ mit darstellender Matrix $B \in M_n(\mathbf{C})$.

a) Zeigen Sie

$$\mathfrak{o}(\mathbf{C}^n, \langle \_, \_ \rangle) = \{A \in M_n(\mathbf{C}) \mid A^T B = -BA\},$$

wobei A^T die transponierte Matrix bezeichnet.

b) Konstruieren Sie eine Basis für die Lie-Algebra $\mathfrak{so}_n(\mathbf{C})$ und zeigen Sie

$$\dim \mathfrak{so}_n(\mathbf{C}) = n(n-1)/2$$

c) Konstruieren Sie eine Basis für die Lie-Algebra $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbf{C})$ und zeigen Sie

$$\dim \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbf{C}) = 2n^2 + n$$

(*Tipp:* Nutzen Sie a) für b) und c).)

Aufgabe 2. (6 Punkte)
Es sei $\mathfrak{g}$ eine zwei-dimensionale Lie-Algebra. Nach Wahl einer Basis x, y von $\mathfrak{g}$ ist die Lie-Klammer vollständig bestimmt durch die Skalare $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ mit $[x, y] = \lambda x + \mu y$.
Zeigen Sie, dass $\mathfrak{g}$ entweder abelsch oder isomorph zu einer Lie-Algebra $\mathfrak{z}$ mit Basis X, Y und Lie-Klammer $[X, Y] = Y$ ist.

Aufgabe 3. (6 Punkte)
Konstruieren Sie...

a) ... Isomorphismen von Lie-Algebren

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C}) \cong \mathfrak{so}_3(\mathbf{C}) \cong \mathfrak{sp}_2(\mathbf{C})$$

b) ... einen Monomorphismus von Lie-Algebren $\mathfrak{z} \to \mathfrak{t}_2$ (die Lie-Algebra $\mathfrak{z}$ ist in Aufgabe 2 definiert).

c) ... einen Isomorphismus $\mathfrak{so}_5(\mathbf{C}) \cong \mathfrak{sp}_4(\mathbf{C})$.

Aufgabe 4. (6 Punkte)

a) Zeigen Sie $[\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}), \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})] = \mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$.

b) Zeigen Sie $[\mathfrak{t}_n(\mathbf{C}), \mathfrak{t}_n(\mathbf{C})] = \mathfrak{n}_n(\mathbf{C})$.

c) Berechnen Sie die Zentren von $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$ und $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$.