

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen je wahr oder falsch sind und kreuzen Sie Ihre Wahl an (wahr / falsch).

1. Darstellungen und Moduln

- a) Irreduzible Moduln sind vollständig reduzibel.
- b) Ist $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{g}$ eine Unter-Lie-Algebra, dann ist \mathfrak{g} ein \mathfrak{g}' -Modul.
- c) Für einen $\mathfrak{d}_n(\mathbf{C})$ -Modul M gilt $x.y.m = y.x.m$ für alle $m \in M$ und $x, y \in \mathfrak{d}_n(\mathbf{C})$.
- d) Es gibt Moduln M , für die nicht immer $x.y.m = y.x.m$ gilt.
- e) Ein Modul M heißt abelsch, falls $[M, M] = 0$.
- f) Jede irreduzible Darstellung ist (als Vektorraum) isomorph zu einem Vektorraum von homogenen Polynomen.
- g) Ist \mathfrak{g} abelsch, dann ist jeder Vektorraum ein \mathfrak{g} -Modul.

2. Darstellungen von \mathfrak{sl}_2

- a) Die $\mathfrak{sl}_2(\overline{\mathbf{F}}_p)$ -Darstellung $V(m)$ ist für alle m irreduzibel.
- b) Es gibt für alle $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ eine irreduzible \mathfrak{sl}_2 -Darstellung dieser Dimension.
- c) $V(5) \oplus V(3) \cong V(9)$.
- d) $V(m) \otimes_K V(n)$ ist immer unzerlegbar.
- e) $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ hat genau zwei nicht-leere Wurzelräume.
- f) Alle $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ -Wurzeln sind linear abhängig.
- g) Jede $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ -Darstellung ist vollständig reduzibel.

3. Halbeinfache und ihre Wurzeln

- a) Torale Unteralgebren von halbeinfachen Lie-Algebra sind echte Unteralgebren.
- b) Maximale Unteralgebren in halbeinfachen Lie-Algebren können toral sein.
- c) In einer maximalen toralen Unteralgebra einer linearen Lie-Algebra sind immer alle Diagonalmatrizen enthalten.
- d) Das Radikal einer Cartan Unteralgebra ist $\{0\}$.
- e) Zu jeder Wurzel α ist der Wurzelraum \mathfrak{g}_α ein-dimensional.
- f) Der Zentralisator einer Cartan-Unteralgebra \mathfrak{h} in \mathfrak{g} stimmt mit \mathfrak{h} überein.
- g) Die Zerlegung von \mathfrak{g} in Wurzelräume ist eine endliche Zerlegung.

4. Wurzelsysteme

- a) Anzahl der Wurzeln = Anzahl der Wurzelfäden.
- b) Zwei linear abhängige Wurzeln spannen immer einen 1-dimensionalen Unterraum auf.
- c) Der Winkel zwischen zwei linear abhängigen Wurzeln ist 180° .
- d) Zu einem Wurzelsystem korrespondiert immer eine halbeinfache Lie-Algebra.
- e) Ist der Winkel zwischen zwei Wurzeln $\pi/4$, dann ist das Verhältnis der Längen der Wurzeln $\sqrt{3}$.
- f) Zwei verschiedene Hyperebenen eines Vektorraums V spannen gemeinsam immer V auf.
- g) In einem Wurzelsystem gibt immer nur endlich viele Wurzelfäden.

Zusatzsprechstunde

Am 10.2. von 16-17 Uhr bei T. Weist (F.13.04) oder M. Boos (F.13.03)

You may notice certain things before you die
Mail them to me should they cause
Your algebra to fail

(The Shins - Your Algebra)