Lie-Algebren **WiSe 2015/16**
1. Selbsttest **Dr. Thorsten Weist**
Keine Abgabe **Dr. Magdalena Boos**

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen je wahr oder falsch sind und kreuzen Sie Ihre Wahl an (wahr / falsch).

Es seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum, $\mathfrak{g}$ eine endlich-dimensionale Lie-Algebra über K und I ein Ideal in $\mathfrak{g}$.

1. Algebraische Strukturen / abstrakte Lie-Algebren

◯◯ a) Jede Algebra ist eine Lie-Algebra.

◯◯ b) Jede Lie-Algebra ist eine Algebra.

◯◯ c) Jeder kommutative Ring ist eine abelsche Lie-Algebra.

◯◯ d) Für jede Menge von Strukturkonstanten wird eine Lie-Algebra definiert.

◯◯ e) Die Lie-Klammer definiert eine Ringstruktur.

◯◯ f) Die Strukturkonstanten definieren die Lie-Struktur eines Vektorraums vollständig.

2. Lineare Lie-Algebren

◯◯ a) $\mathrm{End}V \cong \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$ für jeden $\mathbf{C}$-Vektorraum V.

◯◯ b) Die Lie-Algebra $\mathfrak{so}_3(\mathbf{C})$ ist 6-dimensional.

◯◯ c) Eine Lie-Algebra heißt genau dann linear, wenn sie als Vektorraum 2 Erzeuger hat.

◯◯ d) $\mathfrak{t}_n(K) = \mathfrak{d}_n(K) + \mathfrak{n}_n(K)$ ist eine direkte Summe von Vektorräumen.

◯◯ e) $\mathrm{Spur}(x + y) = \mathrm{Spur}(x) + \mathrm{Spur}(y)$

◯◯ f) Alle Strukturkonstanten von $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$ sind 1 oder 0.

3. Homomorphismen

◯◯ a) Iso gdw. Epi und Mono.

◯◯ b) Kern und Bild eines Lie-Algebren-Homomorphismus sind Lie-Unteralgebren.

◯◯ c) Die üblichen Homomorphissätze gelten.

◯◯ d) Es gibt einen Monomorphismus $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C}) \hookrightarrow \mathfrak{gl}_2(\mathbf{C})$.

◯◯ e) Für jede Lie-Unteralgebra $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{g}$ gibt es einen Monomorphismus $\mathfrak{g}' \hookrightarrow \mathfrak{g}$.

◯◯ f) Die Derivationen von $\mathfrak{g}$ sind genau die linearen Abbildungen $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$.

4. Ideale

◯◯ a) Ein Ideal in $\mathfrak{g}$ ist eine Lie-Unteralgebra.

◯◯ b) $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ ist eine Lie-Unteralgebra.

◯◯ c) Das Zentrum ist ein Ideal.

◯◯ d) $\dim_K I < \dim_K \mathfrak{g}$

◯◯ e) $\dim_K \mathfrak{g}/I = \dim_K \mathfrak{g} - \dim_K I + 1$

◯◯ f) Einfache Lie-Algebren haben keine Ideale.