Prof. Dr. M. Reineke
Dr. M. Boos

WiSe 2014/15

Übungen zur Vorlesung „Kommutative Algebra“

6. Übungsblatt

Abgabe am 26.11.2014 bis 16 Uhr (in der Übung oder im BK65)

Aufgabe 1. Es seien $(R,+,\cdot)$ ein Ring und M_i, N_i, L_i für $i \in \{1,2,3\}$ R-Moduln. Im folgenden kommutativen Diagramm seien alle Abbildungen R-Modulhomomorphismen:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & L_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "l_1"] & M_1 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "m_1"] & N_1 \arrow[r] \arrow[d, "n_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L_2 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "l_2"] & M_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "m_2"] & N_2 \arrow[r] \arrow[d, "n_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L_3 \arrow[r, "h_1"] \arrow[d] & M_3 \arrow[r, "h_2"] \arrow[d] & N_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Es seien alle Spalten sowie die unteren beiden Zeilen exakt.

Zeigen Sie, dass dann auch die obere Zeile exakt ist. *(Bemerkung: Das ist das so genannte Neunerlemma.)*

Aufgabe 2. Es seien $(R,+,\cdot)$ ein Ring und M_i, N_i für $i \in \{1,..,5\}$ R-Moduln. Im folgenden kommutativen Diagramm seien alle Abbildungen R-Modulhomomorphismen:

$$
\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & M_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "h_3"] & M_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "h_4"] & M_5 \arrow[d, "h_4"] \\
N_1 \arrow[r, "g_1"'] & N_2 \arrow[r, "g_2"'] & N_3 \arrow[r, "g_3"'] & N_4 \arrow[r, "g_4"'] & N_5
\end{tikzcd}
$$

Davon seien h_2 und h_4 Isomorphismen, h_1 ein Epimorphismus und h_5 ein Monomorphismus. Außerdem seien beide Zeilen des Diagramms exakt.

Zeigen Sie, dass h_3 ein Isomorphismus ist. *(Bemerkung: Das ist das so genannte Fünferlemma.)*

Aufgabe 3. Es seien $(R, +, \cdot)$ ein Ring und M ein freier R-Modul. Zeigen Sie, dass die Anwendung von $\mathrm{Hom}_R(M, \_\_)$ exakte Sequenzen erhält.

Aufgabe 4. Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Lesen Sie den Abschnitt in Atiyah-Macdonald zum Thema "Additive Funktionen" (Seite 23-24).

Zeigen Sie, dass die additiven Funktionen, die dort definiert werden, mit Funktionalen auf $G_0(R)$ identifiziert werden können. Beweisen Sie anschließend, dass $G_0(R) = \mathbb{Z}$ gilt, falls R ein Körper ist.