Prof. Dr. M. Reineke **WiSe 2014/15**
Dr. M. Boos

Übungen zur Vorlesung „Kommutative Algebra“

5. Übungsblatt

Abgabe am 19.11.2014 bis 16 Uhr (in der Übung oder im BK65)

Aufgabe 1. Zeigen Sie die universelle Eigenschaft von Coker (Notation siehe Vorlesung).

Aufgabe 2. Es sei $(A, +, \cdot)$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Es seien M, N endlich erzeugte A-Moduln sowie $f : M \to N$ ein Modulhomomorphismus.

Zeigen Sie: Ist der induzierte Homomorphismus $f : M/\mathfrak{m}M \to N/\mathfrak{m}N$ surjektiv, dann ist auch f surjektiv.

Aufgabe 3. Es sei $(A, +, \cdot)$ ein Ring, der als A-Modul als direkte Summe von Untermoduln $U_1, ..., U_n$ gegeben ist. Zeigen Sie:

1. $\mathfrak{a}_i := \sum_{i \neq j} U_j$ ist ein Ideal.
2. A ist als Ring isomorph zu $\prod_{i=1}^n A/\mathfrak{a}_i$.

Aufgabe 4. Eine partiell geordnete Menge I heißt *gerichtet*, wenn für jedes Paar $i, j \in I$ ein Element $k \in I$ existiert, so dass $i \leq k$ und $j \leq k$ gilt.

Es seien $(A, +, \cdot)$ ein Ring, I eine gerichtete Menge sowie $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von A-Moduln, indiziert durch I. Für jedes Paar $i, j \in I$ mit $i \leq j$ sei ein A-Homomorphismus $\mu_{i,j} : M_i \to M_j$ gegeben, folgende Axiome seien erfüllt:

(1) $\mu_{i,i}$ ist die Identitätsabbildung von M_i für alle $i \in I$,

(2) $\mu_{i,k} = \mu_{j,k} \circ \mu_{i,j}$, falls $i \leq j \leq k$.

Die Moduln M_i und die Homomorphismen $\mu_{i,j}$ formen ein so genanntes *gerichtetes System* $\mathbb{M} = (M_i, \mu_{i,j})$ über der gerichteten Menge I.

Definiere $C := \oplus_{i \in I} M_i$ und identifiziere jeden Modul M_i mit seinem kanonischen Bild in C. Definiere D als Untermodul von C, der von allen Elementen der Form $x_i - \mu_{i,j}(x_i)$ mit $i \leq j$ und $x_i \in M_i$ erzeugt wird.

Definiere den sogenannten *direkten Limes* $\varinjlim M_i$ von $\mathbb{M}$ als Modul $M := C/D$ zusammen mit den Homomorphismen $\overrightarrow{\mu_i}$, die wie folgt entstehen: Es sei $\mu : C \to M$ die kanonische Projektion; mit μ_i bezeichnen wir die Einschränkung von μ auf M_i; es gilt $\mu_i = \mu_j \circ \mu_{i,j}$ für $i \leq j$.

Zeigen Sie, dass der direkte Limes (bis auf Isomorphismus) durch die folgende universelle Eigenschaft charakterisiert wird:

Es sei N ein A-Modul und für jedes $i \in I$ sei $\alpha_i : M_i \to N$ ein A-Modul Homomorphismus, so dass $\alpha_i = \alpha_j \circ \mu_{i,j}$ falls $i \leq j$. Dann existiert ein eindeutiger Homomorphismus $\alpha : M \to N$ so dass $\alpha_i = \alpha \circ \mu_i$ für alle $i \in I$.