Prof. Dr. M. Reineke **WiSe 2014/15**
Dr. M. Boos

Übungen zur Vorlesung „Kommutative Algebra“

4. Übungsblatt

Abgabe am 12.11.2014 bis 16 Uhr (in der Übung oder im BK65)

Aufgabe 1.

1. Zeigen Sie, dass $Spec(\mathbb{Z})$ die Menge der Primzahlen mit koendlicher Topologie plus ein dicker Punkt ist.
2. Versuchen Sie, möglichst viel von der Beschreibung von $Spec(\mathbb{Z}[x])$ auf http://www.neverendingbooks.org/mumfords-treasure-map zu verstehen.

Aufgabe 2. Es seien $(R, +, \cdot)$ ein Ring und $\mathfrak{n} \subset R$ das Nilradikal. Zeigen Sie, dass ein Homöomorphismus

$$\mathrm{Spec}(R) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(R/\mathfrak{n})$$

existiert. (*Bemerkung:* Homöomorphismus bedeutet, dass die Abbildung bijektiv und stetig ist sowie eine stetige Umkehrfunktion besitzt.)

Aufgabe 3. Sei M ein R-Modul und sei $p : M \to M$ ein Projektor, d.h. p ist ein R-Homomorphismus mit der Eigenschaft $p^2 = p$. Zeigen Sie, dass

$$M \cong \ker(p) \oplus \mathrm{im}(p)$$

gilt.

Aufgabe 4. Sei I eine Menge und seien M_i für $i \in I$ sowie N Moduln über R. Zeigen Sie:

a) $\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{i\in I} M_i, N) = \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(M_i, N)$.

b) $\mathrm{Hom}_R(N, \prod_{i\in I} M_i) = \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(N, M_i)$.