Prof. Dr. M. Reineke **WiSe 2014/15**
Dr. M. Boos

Übungen zur Vorlesung „Kommutative Algebra“

14. Übungsblatt

Keine Abgabe

Aufgabe 1. Es seien A und B zwei Ringe sowie $f : A \to B$ ein ganzer Ringhomomorphismus.

Zeigen Sie:

Die induzierte Abbildung $f^* : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ ist abgeschlossen, das heißt abgeschlossene Teilmengen in $\mathrm{Spec}(B)$ werden durch f^* auf abgeschlossene Teilmengen in $\mathrm{Spec}(A)$ abgebildet.

Aufgabe 2. Es seien $A \subseteq B$ zwei Ringe, B sei ganz über A. Es sei J_A (bzw. J_B) das Jacobsonradikal von A (bzw. B).

Zeigen Sie:

1. Ist $x \in A$ eine Einheit in B, dann ist x auch eine Einheit in A.
2. $(J_B)^c = J_A$

Aufgabe 3. Es sei G eine endliche Gruppe von Automorphismen eines Rings A. Ein Element $x \in A$ heißt G-invariant, wenn $\sigma(x) = x$ für alle $\sigma \in G$ gilt.

Es sei weiter eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge $S \subseteq A$ gegeben, so dass $\sigma(S) \subseteq S$ für alle $\sigma \in G$ gilt.

Definieren Sie $A^G := \{a \in A \mid a \text{ ist G}-\text{invariant}\}$ und $S^G := S \cap A^G$.

Zeigen Sie:

1. $A^G \subseteq A$ ist ein Unterring.
2. A ist ganz über A^G. *(Tipp: Für $a \in A$ betrachten Sie das Polynom $\prod_{\sigma \in G}(X - \sigma(a))$.)*
3. Die G-Aktion auf A lässt sich zu einer Aktion auf $S^{-1}A$ erweitern.
4. $(S^G)^{-1}A^G \cong (S^{-1}A)^G$.

Aufgabe 4. Es sei B ein Integritätsring und K der zugehörige Quotientenkörper. B sei ein *Bewertungsring* von K, das heißt für alle $x \in K \backslash \{0\}$ gelte $x \in B$ oder $x^{-1} \in B$.

Zeigen Sie:

1. B ist lokal. *(Tipp: Zeigen Sie, dass die Menge der Nicht-Einheiten $\mathfrak{m}$ ein Ideal in B ist. Es gilt $b \in \mathfrak{m}$ genau dann, wenn $b = 0$ oder $b^{-1} \notin B$. Der Fall $x, y = 0$ ist schnell gezeigt. Es seien $x, y \in \mathfrak{m} \backslash \{0\}$ und $b \in B$. Angenommen, $bx \notin \mathfrak{m}$, dann folgt $(bx)^{-1} \in B$ und Sie können einen Widerspruch folgern. Um zu zeigen, dass $x + y \in \mathfrak{m}$, verwenden Sie die Tatsache, dass $xy^{-1} \in B$ oder $x^{-1}y \in B$ gilt. Im ersten Fall schreiben Sie zum Beispiel $x + y = (1 + xy^{-1})y \in B\mathfrak{m}$.)*

2. Ist B' ein Ring, so dass $B \subseteq B' \subseteq K$ gilt, dann ist auch B' ein Bewertungsring für K.

3. B ist ganz abgeschlossen in K. *(Tipp: Ist $x \in K$ ganz über B, dann ist x Nullstelle eines normierten Polynoms $x^n + b_1x^{n-1} + ... + b_n$ mit Koeffizienten in B. Ist $x \in B$, dann folgt die Behauptung direkt. Ist $x^{-1} \in B$, dann betrachten Sie $-(b_1 + b_2x^{-1} + ... + b_nx^{1-n})$.)*