Prof. Dr. M. Reineke **WiSe 2014/15**
Dr. M. Boos

Übungen zur Vorlesung „Kommutative Algebra“

10. Übungsblatt

Abgabe am 7.1.2015 bis 16 Uhr (in der Übung oder im BK65)

Aufgabe 1. Es seien A ein Integritätsring und K der Quotientenkörper von A. Es seien weiter A-Moduln M, M', M'' gegeben. Ein Element $x \in M$ heißt *Torsionselement*, wenn $\operatorname{Ann}(x) \neq \{0\}$ gilt.

1. Zeigen Sie, dass die Menge der Torsionselemente von M einen Untermodul $T(M)$ bildet.

Gilt $T(M) = 0$, so wird T *torsionsfrei* genannt. Zeigen Sie:

2. $M/T(M)$ ist torsionsfrei.
3. Ist $f : M \to N$ ein A-Modulhomomorphismus, dann gilt $f(T(M)) \subseteq T(N)$.
4. Ist $0 \to M \to M' \to M''$ exakt, dann ist auch $0 \to T(M) \to T(M') \to T(M'')$ exakt.
5. $T(M)$ ist der Kern der Abbildung $f : M \to K \otimes_A M; m \mapsto 1 \otimes m$. *(Tipp: Betrachten Sie die Untermoduln $A(k) := A \cdot k \subseteq K$ für $k \in K$. Dann zeigen Sie $K = \varinjlim A(k)$ (vgl. Blatt 5). Es sei $m \in \ker f$ gegeben, d.h. $0 = f(m) = 1 \otimes m \in K \otimes_A M$. Folgern Sie, dass ein $k \in K$ existiert, so dass $1 \otimes m = 0$ in $A(k) \otimes_A M$ gilt. Es folgt $k^{-1} \cdot m = 0$.)*

Aufgabe 2. Im Ring $\mathbb{C}[x, y]$ seien die Ideale $\mathfrak{p}_1 = (x)$ und $\mathfrak{p}_2 = (x, y)$ gegeben.
Zeigen Sie:

1. $\mathfrak{a} := \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2^2 = (x^2, xy)$ und $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2$.
2. $\mathfrak{p}_2^2$ ist primär.
3. $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ sind die Primideale aus dem Eindeutigkeitstheorem für $\mathfrak{a}$.
4. $r(\mathfrak{a}) = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_1$
5. $\mathfrak{a}$ ist nicht primär.

Aufgabe 3. Zeigen Sie:

1. Das Ideal $\mathfrak{m} = (2, t)$ in $\mathbb{Z}[t]$ ist maximal.
2. Das Ideal $\mathfrak{q} = (4, t)$ ist $\mathfrak{m}$-primär, aber keine Potenz von $\mathfrak{m}$.

Aufgabe 4. Es seien A und B Ringe, $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $S \subseteq A$ sei multiplikativ abgeschlossen.

Zeigen Sie, dass $S^{-1}B$ und $(f(S))^{-1}B$ als $S^{-1}A$-Moduln isomorph sind.