Prof. Dr. M. Reineke
Dr. M. Boos **WiSe 2014/15**

Übungen zur Vorlesung „Kommutative Algebra“

1. Übungsblatt

Abgabe am 22.10.2014 bis 16 Uhr (in der Übung oder im BK65)

Aufgabe 1. Es seien R ein kommutativer Ring und $x \in R$ nilpotent.

a) Zeigen Sie, dass $1 + x \in R^*$.

b) Sei $u \in R^*$. Zeigen Sie, dass $u + x \in R^*$.

Aufgabe 2.

a) Es sei K ein Körper. Bestimmen Sie die Einheitengruppen von $\mathbf{Z}[i]$ sowie die Nullteiler von $\mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$ und $K[X]/(X^n)$.

b) Entscheiden Sie, welche der in a) genannten Ringe lokal sind.

Aufgabe 3. Es seien R ein Ring und $f = a_0 + a_1 \cdot X + ... + a_n \cdot X^n$ ein Polynom in $R[X]$.

a) Zeigen Sie, dass genau dann $f \in R[X]^*$ gilt, wenn $a_0 \in R^*$ und $a_1, ..., a_n$ nilpotent sind. (*Tipp:* Ist $b_0 + b_1 \cdot X + ... + b_m \cdot X^m$ das Inverse von f, dann können Sie durch Induktion nach r zeigen, dass $a_n^{r+1} b_{m-r} = 0$ gilt. Beweisen Sie, dass a_n nilpotent ist, woraufhin Sie Aufgabe 1 anwenden können.)

b) Zeigen Sie, dass f genau dann nilpotent ist, wenn $a_0, ..., a_n$ nilpotent sind.

c) Zeigen Sie, dass f genau dann ein Nullteiler in $R[X]$ ist, wenn es $r \neq 0$ in R gibt, so dass $r \cdot f = 0$ gilt. (*Tipp:* Wählen Sie ein Polynom $g = b_0 + b_1 \cdot X + ... + b_m \cdot X^m$ von minimalem Grad, so dass $f \cdot g = 0$. Zeigen Sie $a_n \cdot b_m = 0$ und folgern Sie $a_n \cdot g = 0$ gilt. Per Induktion können Sie nun zeigen, dass für alle $0 \leq r \leq n$ gilt: $a_{n-r} \cdot g = 0$.)

Aufgabe 4. Es sei $K((X))$ der Ring der so genannten formalen Laurentreihen $\sum_{i \in \mathbf{Z}} a_i X^i$ über einem Körper K, das heißt: es gibt ein $n \in \mathbf{Z}$ mit $a_i = 0$ für alle $i \leq n$.

a) Zeigen Sie die Wohldefiniertheit dieser Konstruktion.

b) Zeigen Sie, dass $K((X))$ ein Körper ist. (*Hinweis:* Sie dürfen Ihr in der Vorlesung erlangtes Wissen über die Einheiten in $K[[X]]$ verwenden.)

c) Zeigen Sie, dass $K[[X, X^{-1}]]$, definiert als Menge aller $\sum_{i \in \mathbf{Z}} a_i X^i$ (ohne Einschränkung an die a_i) durch die übliche Multiplikation, die durch $X^a \cdot X^b := X^{a+b}$ induziert wird, NICHT zu einem Ring wird.