Übungen zur Vorlesung Geometrische Invariantentheorie (WS 19/20)

PD Dr. Jürgen Müller
Abgabe bis: 17.12.2019

(9.1) Aufgabe: Isotypische Komponenten von Koordinatenalgebren.
Es seien $\mathbb{G}$ eine lineare algebraische Gruppe, $\sigma \in \Sigma_{\mathbb{G}}$ und $S \in \sigma$ mit Darstellung $\delta \colon \mathbb{G} \to \mathbb{GL}(S)$. Man zeige: Durch $\alpha \mapsto (\mathbb{G} \to \mathbb{K} \colon g \mapsto \mathrm{Spur}(\alpha\delta(g^{-1})))$ wird ein $(\mathbb{G} \times \mathbb{G})$-Isomorphismus $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(S) \to \mathbb{K}[\mathbb{G}]_\sigma$ definiert.

(9.2) Aufgabe: Koordinatenalgebra der additiven Gruppe.
Man betrachte die Koordinatenalgebra der additiven Gruppe $\mathbb{G}_a$.
a) Man bestimme die einfachen $\mathbb{G}_a$-Moduln und den Sockel von $\mathbb{K}[\mathbb{G}_a]$.
b) Die multiplikative Gruppe $\mathbb{G}_m$ operiert in natürlicher Weise auf $\mathbb{G}_a$. Man bestimme die isotypischen Komponenten von $\mathbb{K}[\mathbb{G}_a]$ als $\mathbb{G}_m$-Modul.

(9.3) Aufgabe: Ein unzulässiges Beispiel.
Man betrachte die natürliche Operation der additiven Gruppe

$$\mathbb{G}_a \cong \mathbb{U}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{GL}_2; t \in \mathbb{K} \right\}$$

auf $\mathbb{K}^2$. Es sei $\mathbb{K}[X,Y]$ die Koordinatenalgebra von $\mathbb{K}^2$.
a) Man gebe den zu obiger $\mathbb{G}_a$-Operation gehörenden Comorphismus an, und zeige, daß $\langle Y^2 \rangle \trianglelefteq \mathbb{K}[X,Y$ ein $\mathbb{G}_a$-invariantes Ideal ist.
b) Es seien $R := \mathbb{K}[X,Y]/\langle Y^2 \rangle$ und $\bar{\ } \colon \mathbb{K}[X,Y] \to R$ der natürliche Epimorphismus von $\mathbb{K}$-Algebren. Wie operiert $\mathbb{G}_a$ auf R? Ist R eine affine $\mathbb{K}$-Algebra?
c) Man zeige: Die Fixpunktmenge $R^{\mathbb{G}_a} \subseteq R$ ist eine $\mathbb{K}$-Algebra, und wird als solche von $\{\overline{YX^n} \in R; n \in \mathbb{N}_0\}$ erzeugt. Man folgere, daß $R^{\mathbb{G}_a}$ nicht Noethersch ist, also insbesondere als $\mathbb{K}$-Algebra nicht endlich erzeugt ist.

(9.4)* Aufgabe: Ein zulässiges, aber nicht-lineares Beispiel.
Es seien $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$, und $\mathbb{G}_a$ die additive Gruppe. Man zeige:
a) Durch

$$[a,b,x,y,z] \mapsto [a,b,x+ta^2, y+t(ax+b)+\frac{1}{2}t^2a^3, z+ty+\frac{1}{2}t^2(ax+b)+\frac{1}{6}t^3a^3],$$

für $t,a,b,x,y,z \in \mathbb{K}$, wird $V := \mathbb{K}^5$ zu einer $\mathbb{G}_a$-Varietät.
b) Der Invariantenring $\mathbb{K}[V]^{\mathbb{G}_a}$ ist als $\mathbb{K}$-Algebra nicht endlich erzeugt.

(9.5)* Aufgabe: Nagatas Beispiel.
Es seien $\mathbb{K} := \mathbb{C}$, und $\{a_{ij} \in \mathbb{C}; i \in \{1, \ldots, 16\}, j \in \{1, \ldots, 3\}\}$ paarweise verschiedene, über $\mathbb{Q}$ algebraisch unabhängige Zahlen. Außerdem sei $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{GL}_{32}$ die Menge aller Blockdiagonalmatrizen der Form

$$\bigoplus_{i=1}^{16} \begin{bmatrix} c_i & c_i b_i \\ 0 & c_i \end{bmatrix},$$

wobei $\prod_{i=1}^{16} c_i = 1$ und $\sum_{i=1}^{16} b_i a_{ij} = 0$, für $j \in \{1, \ldots, 3\}$. Man zeige:
a) Es ist $\mathbb{G}$ eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathbb{GL}_{32}$. Also ist $\mathbb{G}$ eine affine algebraische Gruppe, und $V := \mathbb{C}^{32}$ wird zum natürlichen $\mathbb{G}$-Modul.
b) Der Invariantenring $\mathbb{C}[V]^{\mathbb{G}}$ ist als $\mathbb{C}$-Algebra nicht endlich erzeugt.