Übungen zur Vorlesung Geometrische Invariantentheorie (WS 19/20)

PD Dr. Jürgen Müller
Abgabe bis: 10.12.2019

(8.1) Aufgabe: Homomorphismen algebraischer Gruppen.
Es seien $\varphi\colon \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ ein Homomorphismus affiner algebraischer Gruppen, und $H \leq \mathbb{G}$ eine Untergruppe. Man zeige: Es gilt $\overline{\varphi(H)} = \varphi(\overline{H})$.

(8.2) Aufgabe: Darstellungen direkter Produkte.
Es seien $\mathbb{G}$ und $\mathbb{H}$ affine algebraische Gruppen, sowie V ein $\mathbb{G}$-Modul und W ein $\mathbb{H}$-Modul. Man zeige:
a) Das Tensorprodukt $V \otimes_{\mathbb{K}} W$ wird zu einem $(\mathbb{G} \times \mathbb{H})$-Modul bezüglich der Operation $[g,h]\colon v \otimes w \mapsto vg \otimes wh$, für $g \in \mathbb{G}$, $h \in \mathbb{H}$, $v \in V$ und $w \in W$.
b) Es ist $V \otimes_{\mathbb{K}} W$ genau dann ein einfacher $(\mathbb{G} \times \mathbb{H})$-Modul, wenn V ein einfacher $\mathbb{G}$-Modul und W ein einfacher $\mathbb{H}$-Modul sind. Außerdem bekommt man jeden einfachen $(\mathbb{G} \times \mathbb{H})$-Modul auf diese Weise.
c) Zudem wird $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ zu einem $(\mathbb{G} \times \mathbb{H})$-Modul bezüglich der Operation $[g,h]\colon \varphi \mapsto (V \to W\colon x \mapsto x \cdot g^{-1}\varphi h)$, für $g \in \mathbb{G}$, $h \in \mathbb{H}$ und $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$.
d) Es ist $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \cong V^\vee \otimes_{\mathbb{K}} W$ als $(\mathbb{G} \times \mathbb{H})$-Moduln.

(8.3) Aufgabe: Tori.
Man bestimme die isotypischen Komponenten der Kooordinatenalgebra $\mathbb{K}[\mathbb{T}_n]$ des Torus $\mathbb{T}_n$, für $n \in \mathbb{N}$.

(8.4) Aufgabe: Gewichte von $\mathbb{SL}_2$-Darstellungen.
a) Man zeige: Die Abbildungen

$$\mathbb{G}_m \to \mathbb{SL}_2\colon t \mapsto \mathrm{diag}[t, t^{-1}] \text{ und } \mathbb{T}_2 \to \mathbb{GL}_2\colon [t_1, t_2] \mapsto \mathrm{diag}[t_1, t_2]$$

sind injektive Homomorphismen algebraischer Gruppen. (Also kann man damit jede $\mathbb{SL}_2$-Darstellung auf $\mathbb{G}_m$, und jede $\mathbb{GL}_2$-Darstellung auf $\mathbb{T}_2$ einschränken.)
b) Nun sei $V \cong \mathbb{K}^2$ der natürliche $\mathbb{SL}_2$-Modul. Man zeige, daß V zu einem $\mathbb{GL}_2$-Modul fortgesetzt werden kann, siehe Blatt 7.
c) Für $d \in \mathbb{N}_0$ sei $\mathbb{K}[V]_d \leq \mathbb{K}[V]$ die zugehörige homogene Komponente wie bereits auf Blatt behandelt. Man bestimme die isotypischen Komponenten von $\mathbb{K}[V]_d$ als $\mathbb{G}_m$-Modul und als $\mathbb{T}_2$-Modul. Welche Gewichte kommen jeweils vor?

(8.5) Aufgabe: Multiplizitäten in Koordinatenalgebren.
Es seien $\mathbb{G}$ eine linear reduktive Gruppe, V eine affine $\mathbb{G}$-Varietät, die eine dichte $\mathbb{G}$-Bahn $x\mathbb{G} \subseteq V$ besitze, und S ein einfacher $\mathbb{G}$-Modul. Man zeige:
a) Es gilt $[\mathbb{K}[V]\colon S] \leq \dim_{\mathbb{K}}(S)$.
b) Ist $\mathbb{G}_x \leq \mathbb{G}$ der Stabilisator von x, so gilt sogar $[\mathbb{K}[V]\colon S] \leq \dim_{\mathbb{K}}((S^\vee)^{\mathbb{G}_x})$.