Übungen zur Vorlesung Geometrische Invariantentheorie (WS 19/20)

PD Dr. Jürgen Müller
Abgabe bis: 19.11.2019

(6.1) Aufgabe: $\mathbb{GL}_n$-Invarianten.
a) Man betrachte den Polynomring $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ über dem Körper $\mathbb{K}$, wobei $n \in \mathbb{N}_0$. Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ seien $\epsilon_i \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ das i-te elementar-symmetrische Polynom in $\{X_1, \ldots, X_n\}$, und $\sigma_i := \sum_{j=1}^n X_j^i \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ die i-te **Potenzsumme**. Man zeige die **Newton-Identitäten**

$$\sigma_i + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^j \epsilon_j \sigma_{i-j} = (-1)^{i+1} i \epsilon_i.$$

b) Daraus folgere man: Ist $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$ oder $\mathrm{char}(\mathbb{K}) > n$, so gilt für die von den elementar-symmetrische Polynomen bzw. den Potenzsummen erzeugten $\mathbb{K}$-Unteralgebren $\mathbb{K}[\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n] = \mathbb{K}[\sigma_1, \ldots, \sigma_n] \subseteq \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$.
c) Nun sei $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen mit $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$ oder $\mathrm{char}(\mathbb{K}) > n$. Man betrachte die Konjugationsoperation von $\mathbb{G} := \mathbb{GL}_n$ auf $\mathcal{M} := \mathbb{K}^{n \times n}$. Man zeige: Jede $\mathbb{G}$-invariante reguläre Funktion auf $\mathcal{M}$ ist ein Polynom in $\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$, wobei $\tau_i \colon \mathcal{M} \to \mathbb{K} \colon A \mapsto \mathrm{tr}(A^i)$.

(6.2) Aufgabe: Zentralisatoren nilpotenter Matrizen.
Es seien $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, $\mathcal{M} := K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$, und für $A \in \mathcal{M}$ sei $C_{\mathcal{M}}(A) := \{C \in \mathcal{M}; AC = CA\}$.
a) Es sei $J_n \in \mathcal{N}_{[n]}$ ein Jordan-Block. Man zeige: Es gilt $\dim_{\mathbb{K}}(C_{\mathcal{M}}(J_n)) = n$.
b) Nun sei $\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_l] \vdash n$, wobei $\lambda_l > 0$. Für eine nilpotente Matrix $A \in \mathcal{N}_\lambda$ zeige man, daß $\dim_{\mathbb{K}}(C_{\mathcal{M}}(A)) = n + 2 \cdot \sum_{i=1}^l (i-1)\lambda_i$ gilt. Dies benutze man, um $\dim(C_{\mathbb{GL}_n}(A))$ zu bestimmen.

(6.3) Aufgabe: Dominanzordnung.
Es sei $P(n)$ die Menge aller Partitionen von $n \in \mathbb{N}_0$.
a) Man sagt, die Partition $\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n] \vdash n$ **dominiere** die Partition $\mu = [\mu_1, \ldots, \mu_n] \vdash n$, falls $\sum_{i=1}^k \mu_i \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i$ für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt. Man zeige, daß die so gegebene Relation $\trianglelefteq$ eine partielle Ordnung auf $P(n)$ ist. Man gebe ihr jeweiliges **Hasse-Diagramm** für $n \leq 7$ an.
b) Man schreibt $\mu \lessdot \lambda$, falls aus $\mu \lhd \nu \trianglelefteq \lambda$ bereits $\nu = \lambda$ folgt. Man zeige: Es gilt genau dann $\mu \lessdot \lambda$, wenn

$$\lambda = [\mu_1, \ldots, \mu_{r-1}, \mu_r + 1, \mu_{r+1}, \ldots, \mu_{s-1}, \mu_s - 1, \mu_{s+1}, \ldots, \mu_n],$$

wobei $1 \leq r < s \leq n$ mit $\mu_s > \mu_{s+1}$ und $\mu_{r-1} > \mu_r$, falls $r > 1$, und so daß entweder $s = r + 1$, oder $s > r + 1$ und $\mu_r = \mu_s$.

c) Für $\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n] \vdash n$ sei $\lambda'_i := |\{j \in \mathbb{N}; \lambda_j \geq i\}| \in \mathbb{N}_0$ für $i \in \mathbb{N}$. Man zeige: Es ist $\lambda' := [\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n] \vdash n$; sie heißt die zu λ **konjugierte** Partition. Außerdem zeige man, daß $\lambda'' = \lambda$ gilt. Wie kann man die Konjugation von Partitionen mittels **Ferrers-Diagrammen** beschreiben?
d) Alternativ kann man λ' auch mittels Vielfachheiten durch $\lambda' = [n^{a'_n}, \ldots, 1^{a'_1}]$ beschreiben. Man zeige: Es gilt $a'_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$.
e) Man zeige: Es gilt genau dann $\mu \trianglelefteq \lambda$, wenn $\lambda' \trianglelefteq \mu'$.