Übungen zur Vorlesung Geometrische Invariantentheorie (WS 19/20)

PD Dr. Jürgen Müller
Abgabe bis: 5.11.2019

(4.1) Aufgabe: Äquivalenz von (2×2)-Matrizen.
Es seien $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $\mathbb{G} := \mathbb{GL}_2$.
a) Man zeige: Die Gruppe $\mathbb{G}$ operiert regulär durch Konjugation auf $V := \mathbb{K}^{2\times 2}$. Zwei Matrizen in V heißen **äquivalent**, wenn sie in der gleichen $\mathbb{G}$-Bahn liegen.
b) Man zeige: Die Abbildung $\varphi\colon V \to \mathbb{K}^2\colon A \mapsto [\mathrm{tr}(A), \det(a)]$ ist ein surjektiver $\mathbb{G}$-invarianter Morphismus. (Also ist φ konstant auf $\mathbb{G}$-Bahnen.)
c) Es sei $\Delta := \mathcal{V}(X^2 - 4Y) \subseteq \mathbb{K}^2$. Man zeige: Für $z \in \mathbb{K}^2 \setminus \Delta$ besteht $\varphi^{-1}(z)$ aus einer $\mathbb{G}$-Bahn; für $z \in \Delta$ besteht $\varphi^{-1}(z)$ aus zwei $\mathbb{G}$-Bahnen. Man gebe Repräsentanten und die Dimension der Bahnen an. Wie lautet die $\preceq$-Relation?
d) Es sei $V_0 := \{A \in V; \mathrm{tr}(A) = 0\}$. Man beschreibe die Fasern der Einschränkung von φ auf V_0 algebraisch und geometrisch.

(4.2) Aufgabe: Äquivalenz von (3×3)-Matrizen.
Es seien $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $\mathbb{G} := \mathbb{GL}_3$.
a) Man zeige: Die Gruppe $\mathbb{G}$ operiert regulär durch Konjugation auf der Varietät $V_0 := \{A \in \mathbb{K}^{3\times 3}; \mathrm{tr}(A) = 0\}$.
b) Man zeige: Durch $\varphi\colon V_0 \to \mathbb{K}^2\colon A \mapsto [\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma, \alpha\beta\gamma]$, wobei $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ die Eigenwerte von A sind, wird ein surjektiver $\mathbb{G}$-invarianter Morphismus definiert. (Also ist φ konstant auf $\mathbb{G}$-Bahnen.)
c) Es sei $\Delta := \mathcal{V}(4X^3 + 27Y^2) \subseteq \mathbb{K}^2$. Man zeige: Für $z \in \mathbb{K}^2 \setminus \Delta$ besteht $\varphi^{-1}(z)$ aus einer $\mathbb{G}$-Bahn; für $z \in \Delta \setminus \{0\}$ besteht $\varphi^{-1}(z)$ aus zwei $\mathbb{G}$-Bahnen; für $z = 0$ besteht $\varphi^{-1}(z)$ aus drei $\mathbb{G}$-Bahnen. Man gebe Repräsentanten und die Dimension der Bahnen an. Wie lautet die $\preceq$-Relation?

(4.3) Aufgabe: Operation auf Varietäten.
a) Es seien $\mathbb{G}$ eine affine algebraische Gruppe, V eine $\mathbb{G}$-Varietät und $x \in V$. Man zeige: $x(\mathbb{G}^\circ) \subseteq x\mathbb{G}$ ist offen und abgeschlossen.
b) Für die Operation von $\mathbb{G}$ auf sich durch Rechtsmultiplikation ρ zeige man: $\mathbb{K}[\mathbb{G}]$ ist Vereinigung endlich-erzeugter $\rho^*(\mathbb{G})$-invarianter $\mathbb{K}$-Teilräume.
c) Man betrachte zudem die Operation von $\mathbb{G}$ auf sich durch Linksmultiplikation λ. Es sei $F \leq \mathbb{K}[\mathbb{G}]$ ein endlich-erzeugter $\mathbb{K}$-Teilraum. Man zeige: Es gibt einen endlich-erzeugten $(\lambda^*(\mathbb{G}) \times \rho^*(\mathbb{G}))$-invarianten $\mathbb{K}$-Teilraum von $\mathbb{K}[\mathbb{G}]$, der F umfaßt.

(4.4) Aufgabe: Linearisierung linearer Gruppen.
Es seien $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, sowie $\mathbb{G} := \mathbb{GL}_n$, für $n \in \mathbb{N}$, und $\mathbb{K}[\mathbb{G}] = \mathbb{K}[X_{11}, \ldots, X_{nn}]_{\det}$ die Koordinatenalgebra von $\mathbb{G}$.

a) Man betrachte die Operation von $\mathbb{G}$ auf sich durch Rechtsmultiplikation ρ und durch Linksmultiplikation λ. Man bestimme den kleinsten $\rho^*(\mathbb{G})$-invarianten $\mathbb{K}$-Teilraum V von $\mathbb{K}[\mathbb{G}]$, der X_{11} enthält, sowie die analogen Teilräume U für $\lambda^*(\mathbb{G})$, und W für $\lambda^*(\mathbb{G}) \times \rho^*(\mathbb{G})$.
b) Man wähle natürliche $\mathbb{K}$-Basen dieser Teilräume, und gebe die Koordinatenfunktionen der zugehörigen Matrixdarstellungen von $\mathbb{G}$ bzw. $\Delta(\mathbb{G}) := \{[g, g] \in \mathbb{G} \times \mathbb{G}; g \in \mathbb{G}\}$ als Ausdrücke in den Koordinatenfunktionen von $\mathbb{G}$ an. Wie hängen die Matrizen für V, U und W miteinander zusammen?