Übungen zur Vorlesung Geometrische Invariantentheorie (WS 19/20)

PD Dr. Jürgen Müller
Abgabe bis: 29.10.2019

(3.1) Aufgabe: Projektive spezielle lineare Gruppen.
Es seien $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Man betrachte die Koordinatenalgebra $R := \mathbb{K}[X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}]/\langle \det_2 - 1\rangle$ von $\mathbb{SL}_2$. Es seien $S \subseteq R$ die von $\{\overline{X}_{ij}\overline{X}_{kl} \in R; i, j, k, l \in \{1, 2\}\}$ erzeugte $\mathbb{K}$-Unteralgebra, und $\mathbb{PSL}_2$ die affine Varietät mit Koordinatenalgebra S. Man zeige:
a) Ist $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$, so ist $S = \{f \in R; f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{SL}_2\}$.
b) Die Varietät $\mathbb{PSL}_2$ trägt in natürlicher Weise die Struktur einer algebraischen Gruppe, so daß es einen surjektiven Homomorphismus algebraischer Gruppen $\varphi\colon \mathbb{SL}_2 \to \mathbb{PSL}_2$ mit $\ker(\varphi) = \{\pm E_2\}$ gibt. Ist $\mathbb{PSL}_2$ zusammenhängend? Welche Dimension hat $\mathbb{PSL}_2$?
c) Ist $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 2$, so ist φ bijektiv, aber kein Isomorphismus.

(3.2) Aufgabe: Translation von Funktionen.
Es seien $\mathbb{G}$ eine affine algebraische Gruppe, $\mathbb{H} \leq \mathbb{G}$ eine abgeschlossene Untergruppe und $\mathcal{I}(\mathbb{H}) \trianglelefteq \mathbb{K}[\mathbb{G}]$ das zugehörige Verschwindungideal. Man zeige: Es gilt $\mathbb{H} = \{g \in \mathbb{G}; \rho_g^*(\mathcal{I}(\mathbb{H})) \subseteq \mathcal{I}(\mathbb{H})\} = \{g \in \mathbb{G}; \lambda_g^*(\mathcal{I}(\mathbb{H})) \subseteq \mathcal{I}(\mathbb{H})\}$.

(3.3) Aufgabe: Untergruppen algebraischer Guppen.
Es sei $\mathbb{G}$ eine affine algebraische Gruppe.
a) Es sei $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{G}$ eine abgeschlossene Teilmenge, die $1_\mathbb{G}$ enthält und abgeschlossen unter Produktbildung ist. Man zeige, daß $\mathbb{H}$ eine Untergruppe ist.
b) Es seien $\mathbb{H}, \mathbb{U} \leq \mathbb{G}$ abgeschlossene Untergruppen mit $\mathbb{H} \leq N_\mathbb{G}(\mathbb{U})$. Man zeige: Das Komplexprodukt $\mathbb{HU} \subseteq \mathbb{G}$ ist ein abgeschlossene Untergruppe.
c) Es sei $H \leq \mathbb{G}$ eine abelsche Untergruppe. Man zeige, daß $\overline{H} \leq \mathbb{G}$ ebenfalls eine abelsche Untergruppe ist.

(3.4) Aufgabe: Normalteiler algebraischer Guppen.
Es sei $\mathbb{G}$ eine affine algebraische Gruppe.
a) Man zeige, daß $\mathbb{G}^\circ \leq \mathbb{G}$ eine charakteristische Untergruppe ist.
b) Es sei $\varphi\colon \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ ein surjektiver Homomorphismus algebraischer Gruppen. Man zeige, daß $\ker(\varphi) \leq \mathbb{G}$ eine endliche Untergruppe ist.
c) Es sei $\mathbb{G}$ zusammenhängend. Man zeige: Jede endliche normale Untergruppe von $\mathbb{G}$ ist zentral.