# Übungen zur Vorlesung Geometrische Invariantentheorie (WS 19/20)

PD Dr. Jürgen Müller

Abgabe bis: 22.10.2019

---

**(2.1) Aufgabe: Geometrische Größen.**
Man betrachte weiter die Euklidische Ebene $\mathbb{R}^2$. Man bestimme analog zu Aufgabe (1.3) Systeme von Bestimmungsstücken sowie die $\mathbb{R}$-Algebren $\mathcal{A}^{\mathcal{G}}$ und $\mathcal{R}^{\mathcal{G}}$ für **i)** die Punkte in $\mathbb{R}^2$ und **ii)** die Strecken in $\mathbb{R}^2$.

**(2.2) Aufgabe: Affine algebraische Gruppen.**
**a)** Es seien $\mathbb{G}$ und $\mathbb{G}'$ affine algebraische Gruppen. Man zeige: Das direkte Produkt $\mathbb{G} \times \mathbb{G}'$ ist ebenfalls eine affine algebraische Gruppe.
**b)** Es seien $\mathbb{H} \leq \mathbb{G}$ eine abgeschlossene Untergruppe mit Einbettung $\varphi \colon \mathbb{H} \to \mathbb{G}$. Man zeige, daß $\mathbb{H}$ in natürlicher Weise eine affine algebraische Gruppe ist, so daß $\varphi$ ein Homomorphismus algebraischer Gruppen wird.

**(2.3) Aufgabe: Automorphismen algebraischer Gruppen.**
Es sei $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Man zeige:
**a)** Die Abbildungen $\mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a \colon x \mapsto ax$, für $a \in \mathbb{K}^*$, sind die einzigen Automorphismen der additiven Gruppe $\mathbb{G}_a = \mathbb{G}_a(\mathbb{K})$ als algebraische Gruppe.
**b)** Die Abbildungen $\mathrm{id} \colon \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m \colon x \mapsto x$ und $\iota \colon \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m \colon x \mapsto x^{-1}$ sind die einzigen Automorphismen der multiplikativen Gruppe $\mathbb{G}_m = \mathbb{G}_m(\mathbb{K})$ als algebraische Gruppe.
**c)** Die Guppen $\mathbb{G}_a$ und $\mathbb{G}_m$ sind als algebraische Gruppent nicht isomorph.

**(2.4) Aufgabe: Determinantenpolynom.**
Es seien $K$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $\det_n \in R := K[X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{nn}]$ das $n$-te Determinantenpolynom. Man zeige: Für $a \in K$ ist $\det_n - a \in R$ irreduzibel.

**(2.5) Aufgabe: Lineare algebraische Gruppen.**
Es seien $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, und $n \in \mathbb{N}$. Man zeige, daß die folgenden Gruppen lineare algebraische Gruppen sind, und bestimme jeweils ihre affine Koordinatenalgebra und ihre Dimension. Welche sind irreduzibel?
**a)** $\mathbb{Z}_n := \{\alpha \cdot E_n \in \mathbb{GL}_n; 0 \neq \alpha \in \mathbb{K}\}$ und $\mathbb{T}_n := \{[a_{ij}] \in \mathbb{GL}_n; a_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j\}$. Man zeige: Es gilt $\mathbb{Z}_n = Z(\mathbb{GL}_n)$, sowie $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{G}_m$ und $\mathbb{T}_n \cong (\mathbb{G}_m)^n$ als algebraische Gruppen.
**b)** $\mathbb{U}_n := \{[a_{ij}] \in \mathbb{GL}_n; a_{ij} = 0 \text{ für } i > j, a_{ii} = 1\}$ und $\mathbb{B}_n := \{[a_{ij}] \in \mathbb{GL}_n; a_{ij} = 0 \text{ für } i > j\}$. Man zeige: Es gilt $\mathbb{B}_n = N_{\mathbb{GL}_n}(\mathbb{U}_n)$, und schreibe $\mathbb{B}_n$ als abstraktes semidirektes Produkt.

**c)** Die Gruppen $W_n \leq \mathbb{GL}_n$ der Permutationsmatrizen und $\mathbb{N}_n \leq \mathbb{GL}_n$ der monomialen Matrizen. Man zeige: Es gilt $\mathbb{N}_n = N_{\mathbb{GL}_n}(\mathbb{T}_n)$, und schreibe $\mathbb{N}_n$ als abstraktes semidirektes Produkt.
**d)** Jede endliche Gruppe kann als lineare algebraische Gruppe aufgefaßt werden.