Übungen zur Vorlesung Geometrische Invariantentheorie (WS 19/20)

PD Dr. Jürgen Müller

(13.1) Aufgabe: Lineare Reduktivität.
Man zeige: Eine affine algebraische Gruppe $\mathbb{G}$ ist genau dann linear reduktiv, wenn für jeden $\mathbb{G}$-Modul V und jedes $\mathbb{G}$-invariante Ideal $I \leq \mathbb{K}[V]$ stets $\mathbb{K}[V]^{\mathbb{G}}/(I \cap \mathbb{K}[V]^{\mathbb{G}}) \cong (\mathbb{K}[V]/I)^{\mathbb{G}}$ gilt.

(13.2) Aufgabe: Trennungseigenschaft.
Es seien $\mathbb{G}$ eine geometrisch reduktive Gruppe, V eine affine $\mathbb{G}$-Varietät, und $W, W' \subseteq V$ abgeschlossene $\mathbb{G}$-invariante Teilmengen. Man zeige: Es gibt eine Invariante $f \in \mathbb{K}[V]^{\mathbb{G}}$ mit $W \subseteq f^{-1}(0)$ und $W' \subseteq f^{-1}(1)$.

Hinweis. Für ein $h \in \mathbb{K}[V]$ mit $W \subseteq h^{-1}(0)$ und $W' \subseteq h^{-1}(1)$ betrachte man den von h erzeugten $\mathbb{G}$-Teilmodul von $\mathbb{K}[V]$.

(13.3) Aufgabe: Faktorgruppen.
Es seien $\mathbb{G}$ eine affine algebraische Gruppe, $\mathbb{H} \trianglelefteq \mathbb{G}$ ein (geometrisch) reduktiver Normalteiler, und V eine affine $\mathbb{G}$-Varietät, auf der $\mathbb{H}$ trivial operiere. Man zeige: Dann ist V in natürlicher Weise eine $(\mathbb{G}/\mathbb{H})$-Varietät.

(13.4) Aufgabe: Nullfaser.
Es seien $\mathbb{G}$ eine (geometrisch) reduktive Gruppe, V ein $\mathbb{G}$-Modul, sowie $\pi\colon V \to V//\mathbb{G}$ der zugehörige Quotient, und $N := \pi^{-1}(\pi(0)) \subseteq V$. Man zeige:
a) Es ist $N \subseteq V$ die Menge aller Punkte $v \in V$, für die $f(v) = 0$ für alle homogenen Invarianten $f \in \mathbb{K}[V]^{\mathbb{G}}$ positiven Grades gilt.
b) Sind $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{K}[V]^{\mathbb{G}}$, für ein $r \in \mathbb{N}_0$, so daß $N = \mathcal{V}(f_1, \ldots, f_r) \subseteq V$, so ist $\mathbb{K}[f_1, \ldots, f_r] \subseteq \mathbb{K}[V]^{\mathbb{G}}$ eine endliche Erweiterung von $\mathbb{K}$-Algebren.