

## Übungen zur Vorlesung Geometrische Invariantentheorie (WS 19/20)

PD Dr. Jürgen Müller  
Abgabe bis: 28.01.2020

---

### (12.1) Aufgabe: Quadratische Formen.

Es sei  $\mathbb{K}$  ein algebraisch abgeschlossener Körper mit  $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ , und für  $n \in \mathbb{N}$  seien  $\mathcal{V} := \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]_2$  die Menge der  $n$ -ären quadratischen Formen über  $\mathbb{K}$ , sowie  $\mathbb{K}[\mathcal{V}]$  die zugehörige Koordinatenalgebra und  $\Delta \in \mathbb{K}[\mathcal{V}]$  die Diskriminante.

**a)** Man zeige: Die Teilmenge  $\mathcal{U} := \mathcal{V} \setminus \Delta^{-1}(0)$  ist eine affine  $\text{SL}_n$ -Varietät mit Koordinatenalgebra  $\mathbb{K}[\mathcal{U}] = \mathbb{K}[\mathcal{V}]_\Delta$  sowie Invariantenalgebra  $\mathbb{K}[\mathcal{U}]^{\text{SL}_n} = \mathbb{K}[\Delta]_\Delta$ , und  $\Delta: \mathcal{U} \rightarrow (\mathbb{K} \setminus \{0\})$  ist ein geometrischer Quotient. Man bestimme die Dimension der  $\text{SL}_n$ -Bahnen in  $\mathcal{U}$  und zugehörige Isotropiegruppen.

**b)** Nun betrachte man  $\mathcal{V}$  unter  $\text{GL}_n$ -Operation. Man bestimme die zugehörigen Bahnen und die  $\preceq$ -Relation. Außerdem zeige man, daß  $\mathbb{K}[\mathcal{V}]^{\text{GL}_n} = \mathbb{K}$  gilt, und bestimme den zugehörigen Quotienten. Ist er geometrisch?

### (12.2) Aufgabe: Matrixäquivalenz.

Es seien  $\mathbb{K}$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und  $\mathcal{M} := \mathbb{K}^{n \times n}$ , für  $n \in \mathbb{N}$ , mit der durch Konjugation gegebenen  $\text{GL}_n$ -Operation; dann ist  $\mathbb{K}[\mathcal{M}]^{\text{GL}_n} = \mathbb{K}[\epsilon_1, \dots, \epsilon_n]$ , mit den 'elementar-symmetrischen' Funktionen  $\epsilon_i \in \mathbb{K}[\mathcal{M}]_i$ , und  $\epsilon: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{K}^n$  sei der zugehörige Quotient.

**a)** Man zeige, daß  $\mathbb{K}[\mathcal{M}]^{\text{SL}_n} = \mathbb{K}[\mathcal{M}]^{\text{GL}_n}$  gilt; also ist  $\epsilon$  auch der  $\text{SL}_n$ -Quotient. Ist  $\epsilon$  als solcher geometrisch?

**b)** Nun sei  $\Delta: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{K}: A \mapsto \text{disc}(\chi_A)$  die Diskriminantenfunktion, wobei  $\chi_A$  das charakteristische Polynom von  $A$  und  $\text{disc}$  die übliche Diskriminante seien. Man zeige: Es ist  $\Delta$  eine  $\text{GL}_n$ -invariante reguläre Abbildung, also ist  $\Delta \in \mathbb{K}[\mathcal{M}]^{\text{GL}_n}$ . Für  $n \leq 2$  schreibe man  $\Delta$  als Polynom in  $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ ; siehe auch Aufgaben (4.1) und (4.2).

**c)** Man zeige, daß die Teilmenge  $\mathcal{S} := \mathcal{M} \setminus \Delta^{-1}(0)$  eine affine  $\text{GL}_n$ -Varietät ist, die aus (gewissen) diagonalisierbaren Matrizen besteht. Außerdem zeige man, daß  $\mathbb{K}[\mathcal{S}] = \mathbb{K}[\mathcal{M}]_\Delta$  und  $\mathbb{K}[\mathcal{S}]^{\text{GL}_n} = \mathbb{K}[\epsilon_1, \dots, \epsilon_n]_\Delta$  gelten. Man gebe den zugehörigen Quotienten an, und zeige, daß er geometrisch ist. Man bestimme die Dimension der  $\text{GL}_n$ -Bahnen in  $\mathcal{S}$  und zugehörige Isotropiegruppen.

### (12.3) Aufgabe: Vektorinvarianten.

Es seien  $\mathbb{K}$  ein algebraisch abgeschlossener Körper mit  $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ , und  $G := \langle g \rangle \cong C_2$ , die via  $g \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  auf  $V := \mathbb{K}^2$  operiere. Man betrachte  $W := V \oplus V$ .

**a)** Es sei  $\mathbb{K}[W] \cong \mathbb{K}[V] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[V] \cong \mathbb{K}[X_1, X_2, Y_1, Y_2]$ , wobei  $X_{1,2}$  und  $Y_{1,2}$  die Koordinatenfunktionen auf dem linken bzw. rechten Summanden sind. Wie operiert  $G$  auf  $\mathbb{K}[V]$  und  $\mathbb{K}[W]$ ? Welche Bahnen hat  $G$  auf  $V$  und  $W$ ?

- b)** Es seien  $e_1 = X_1 + X_2$  und  $e_2 = X_1X_2$ , sowie  $f_1 = Y_1 + Y_2$  und  $f_2 = Y_1Y_2$ , und außerdem  $g_2 := X_1Y_1 + X_2Y_2$  sowie  $h_2 := X_1Y_2 + X_2Y_1$ . Man zeige, daß  $\mathbb{K}[V]^G = \mathbb{K}[e_1, e_2]$  und  $\mathbb{K}[W]^G = \mathbb{K}[e_1, e_2, f_1, f_2, g_2, h_2]$  gelten.
- c)** Es sei  $P := \mathbb{K}[V]^G \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[V]^G \subseteq \mathbb{K}[W]^G$ . Man zeige, daß  $\mathbb{K}[W]^G = P[d_2] \subseteq \mathbb{K}[W]$  ist, wobei  $d_2 := g_2 - h_2$  ein normiertes irreduzibles rein-quadratisches Polynom  $\delta \in P[T]$  erfüllt. Daraus folgere man, daß  $P \subseteq \mathbb{K}[W]^G$  eine Noether-Normalisierung ist, und daß  $\mathbb{K}[W]^G$  ein freier  $P$ -Modul vom Rang 2 ist.
- d)** Man zeige, daß der (geometrische) Quotient  $W/G$  eine Hyperfläche in  $\mathbb{K}^5$  ist, die einen natürlichen Epimorphismus auf  $\mathbb{K}^4$  hat, dessen Fasern aus höchstens zwei Punkten bestehen.