Übungen zur Vorlesung Geometrische Invariantentheorie (WS 19/20)

PD Dr. Jürgen Müller
Abgabe bis: 21.01.2020

(11.1) Aufgabe: Reduktive Gruppen.
Es sei $\mathbb{G}$ eine zusammenhängende reduktive Gruppe. Man zeige: Es ist $R(\mathbb{G}) = Z(\mathbb{G})^\circ$, die Kommutatorgruppe $[\mathbb{G}, \mathbb{G}]$ ist zusammenhängend und halbeinfach, und $R(\mathbb{G}) \cap [\mathbb{G}, \mathbb{G}]$ ist endlich.

Hinweis. Man benutze Aufgabe **(10.4)**.

(11.2) Aufgabe: Volle und spezielle lineare Gruppen.
a) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Man zeige: Es ist $[\mathbb{B}_n, \mathbb{B}_n] = \mathbb{U}_n$ und $(\mathbb{U}_n)^{(n)} = \{1\}$. Daraus folgere man, daß $\mathbb{B}_n$ und $\mathbb{U}_n$ auflösbar sind.

Hinweis. Für die erste Aussage betrachte man die Abbildung $\mathbb{U}_n \to \mathbb{U}_n \colon u \mapsto [t, u]$, für ein $t \in \mathbb{T}_n$ mit $C_{\mathbb{GL}_n}(t) = \mathbb{T}_n$. Für die zweite Aussage betrachte man die **absteigende Zentralreihe** von $\mathbb{U}_n$, die durch $(\mathbb{U}_n)^{[0]} := \mathbb{U}_n$ und $(\mathbb{U}_n)^{[i]} := [\mathbb{U}_n, (\mathbb{U}_n)^{[i-1]}]$, für $i \in \mathbb{N}$, definiert ist.

b) Man zeige: Es gilt $[\mathbb{GL}_n, \mathbb{GL}_n] = [\mathbb{SL}_n, \mathbb{SL}_n] = \mathbb{SL}_n = \langle \mathbb{U}_n, \mathbb{U}_n^- \rangle$

c) Man zeige: Die Gruppen $\mathbb{GL}_n$ und $\mathbb{SL}_n$ sind reduktiv.

Hinweis. Man betrachte die $\mathbb{U}_n$ und $\mathbb{U}_n^- := \{A^{-\mathrm{tr}} \in \mathbb{SL}_n; A \in \mathbb{U}_n\}$, und benutze (ohne Beweis) den **Satz von Lie-Kolchin**: Die einfachen Moduln einer zusammenhängenden auflösbaren algebraischen Gruppe sind eindimensional.

(11.3) Aufgabe: Multplikative Gruppe.
Man betrachte die Gruppe $\mathbb{G} := \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$, die durch $[x, y] \cdot [a, b] := [xa, yb]$, für $x, y \in \mathbb{K}$ und $a, b \in \mathbb{G}_m$, auf $V := \mathbb{K}^2$ operiere, sowie die Einbettungen $\gamma \colon \mathbb{G}_m \to \mathbb{G} \colon g \mapsto [g, 1]$ und $\delta \colon \mathbb{G}_m \to \mathbb{G} \colon g \mapsto [g, g]$ und $\epsilon \colon \mathbb{G}_m \to \mathbb{G} \colon g \mapsto [g, g^{-1}]$, siehe Aufgabe **(5.1)**. Man bestimme die Invariantenalgebren, die algebraischen Quotienten und deren Fasern. Welche der Quotienten sind geometrisch?

(11.4) Aufgabe: Additive Gruppe.
Man betrachte den $\mathbb{G}_a$-Modul $V := \mathbb{K}^2$ zur Darstellung $\mathbb{G}_a \to \mathbb{GL}_2 \colon t \mapsto \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, siehe Aufgabe **(10.1)**. Man zeige: Die Teilmenge $U := V \setminus V^{\mathbb{G}_a}$ ist eine affine $\mathbb{G}_a$-Varietät mit Koordinatenalgebra $\mathbb{K}[U] = \mathbb{K}[X^{\pm 1}, Y]$ und Invariantenalgebra $\mathbb{K}[U]^{\mathbb{G}_a} = \mathbb{K}[X^{\pm 1}]$, und $\pi \colon U \to \mathbb{K}^* \colon [x, y] \mapsto x$ ist ein geometrischer Quotient.