

## Übungen zur Vorlesung „Elementare Zahlentheorie“ Blatt 6

### Aufgabe 1.

Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie, dass die Gruppe

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$$

genau dann zyklisch ist, wenn  $\text{ggT}(m, n) = 1$  gilt.

### Aufgabe 2.

Berechnen Sie  $\left(\frac{65}{307}\right)$  und  $\left(\frac{198}{71}\right)$ .

### Aufgabe 3.

Sei  $p$  eine ungerade Primzahl. Zeigen Sie, dass es genau  $\frac{p-1}{2}$  Quadrate in  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$  gibt, d.h. zeigen Sie

$$\left| \left\{ n + p\mathbb{Z} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \mid \left(\frac{n}{p}\right) = 1 \right\} \right| = \frac{p-1}{2}.$$

### Aufgabe 4.

Es sei  $p \in \mathbb{N}$  eine Primzahl und  $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$ . Zeigen Sie, dass

$$(\alpha + \beta)^p = \alpha^p + \beta^p.$$