

## Übungen zur Vorlesung „Elementare Zahlentheorie“

### Blatt 5

#### Aufgabe 1.

Bestimmen Sie eine Primfaktorzerlegung von  $10 + 2i \in \mathbb{Z}[i]$ .

**Hinweis:** Bestimmen Sie zunächst eine Primfaktorzerlegung von  $N(10 + 2i)$  in  $\mathbb{Z}$ .

#### Aufgabe 2.

Bestimmen Sie alle ganzen Zahlen  $x \in \mathbb{Z}$ , welche simultan die Kongruenzen

$$4x \equiv 1 \pmod{11}$$

$$5x \equiv 1 \pmod{12}$$

$$6x \equiv 1 \pmod{13}$$

erfüllen.

#### Aufgabe 3.

Sei  $n \in \mathbb{N}$ .

(a) Zeigen Sie

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \{[a] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid [a] \text{ ist ein Erzeuger von } (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)\}.$$

(b) Bestimmen Sie  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$  für  $n = 100$ .

#### Aufgabe 4.

Bestimmen Sie die Werte  $\varphi(n)$  für folgende Zahlen  $n$ .

(a)  $n = 2187$ .

(b)  $n = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10$ .

(c)  $n = \sum_{i=1}^{100} i$ .