Prof. Dr. S. Orlik
Dr. M. Bender
BU Wuppertal
SS 2019

Abgabe bis 2.05.2019, 11h, in das
Postfach 110, Gebäude D.13

Übungen zur Vorlesung „Elementare Zahlentheorie“
Blatt 3

Aufgabe 1.

Zeigen Sie, dass $2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ irreduzibel, aber nicht prim ist.

Aufgabe 2.

Sei $K \in \{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ein Körper. Entscheiden Sie, welches der nachfolgenden Polynome f in dem jeweiligen Polynomring $K[X]$ irreduzibel ist:

(a) $f = X^2 + X + 1$.

(b) $f = X^2 + 1$.

Aufgabe 3.

Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler der Polynome $f, g \in \mathbb{Q}[T]$ und stellen Sie diesen als Linearkombination in f und g dar:

(a) $f = T^5 + T^4 + T^3 + T^2 + T + 1, g = T^4 + T^3 + 2T^2 + T + 1$.

(b) $f = T^n - 1, g = T - 1$ mit $n \in \mathbb{N}$.

(c) $f = T^n + T^{n-1} + \ldots + T + 1, g = T + 1$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4.

Sei $R = (R, N)$ ein euklidischer Ring und sei $x \in R$ mit $N(x) = 1$. Zeigen Sie, dass x entweder ein irreduzibles Element oder eine Einheit ist.