Übungen zur Vorlesung Elementare Zahlentheorie (SS 18)

PD Dr. Jürgen Müller, Dr. Martin Bender

(6.1) Aufgabe: Teilbarkeitsregeln.
Man betrachte $n \in \mathbb{N}$. Man teile die Dezimaldarstellung von n in Abschnitte der Länge $k \in \mathbb{N}$ auf; eventuell ergänzt man dazu führende Nullen. Die Summe $\mathrm{QS}_k(n) \in \mathbb{N}_0$ dieser Abschnitte heißt die k-te **Quersumme** von n. Addiert man die Abschnitte mit abwechselndem Vorzeichen, so heißt der Betrag $\mathrm{QS}_k^-(n) \in \mathbb{N}_0$ der so erhaltenen Zahl die k-te **alternierende Quersumme** von n. Durch Rechnen in geeigneten Restklassenringen zeige man:

a) Es ist genau dann $3 \mid n$, wenn $3 \mid \mathrm{QS}_1(n)$.

b) Es ist genau dann $9 \mid n$, wenn $9 \mid \mathrm{QS}_1(n)$.

c) Es ist genau dann $11 \mid n$, wenn $11 \mid \mathrm{QS}_1^-(n)$.

d) Es ist genau dann $7 \mid n$, wenn $7 \mid \mathrm{QS}_3^-(n)$.

e) Es ist genau dann $13 \mid n$, wenn $13 \mid \mathrm{QS}_3^-(n)$.

(6.2) Aufgabe: Erweiterter Euklidischer Algorithmus in $\mathbb{Z}[i]$.
Seien $x = 10 - 5 \cdot i$ und $y_k = 5 - k \cdot i \in \mathbb{Z}[i]$. Bestimmen Sie für $k \in \{3, 4, 5\}$ einen größten gemeinsamen Teiler von x und y_k und zugehörige Bézout-Koeffizienten. Man bestimme auch die Faktorisierung der genannten Elemente.

(6.3) Aufgabe: Ring der Eisensteinschen Zahlen.
Sei $\zeta = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}$ und $\mathbb{Z}[\zeta] \subseteq \mathbb{C}$ der Ring der Eisensteinschen Zahlen. Zeigen Sie:

a) Man untersuche die Elemente $2, 3, 5, 7$ auf Zerlegbarkeit in $\mathbb{Z}[\zeta]$.

b) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler und zugehörige Bézout-Koeffizienten für die Eisensteinschen Zahlen

$$5 + 4\zeta \quad \text{und} \quad 7 + 2\zeta.$$

(6.4) Aufgabe: Unzerlegbare, nicht-prime Elemente.
Es sei $d \leq -3$ quadratfrei und ungerade. Man zeige: Das Element $2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ist unzerlebgar, aber nicht prim.

Abgabe: 31.05.2018 (Donnerstag), bis 10:00 Uhr.