Übungen zur Vorlesung Elementare Zahlentheorie (SS 18)

PD Dr. Jürgen Müller, Dr. Martin Bender

(4.1) Aufgabe: Euler-Produkte.

a) Sei $M = \{p_1, \ldots, p_r\}$ eine endliche Menge von Primzahlen und $N_M = \{\prod_{j=1}^r p_j^{\nu_j} \mid \nu_j \in \mathbb{N}_0\}$ die Menge aller natürlichen Zahlen, die durch keine Primzahl außerhalb von M teilbar sind. Zeigen Sie für $s \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$\sum_{n \in N_M} \frac{1}{n^s} = \prod_{j=1}^{r} \frac{1}{1 - p_j^{-s}}.$$

b) Folgern Sie: Gäbe es nur endlich viele Primzahlen, so wäre die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

für alle $s \in \mathbb{R}_{>0}$ konvergent.

c) Für $x \in \mathbb{R}$ sei $\mathcal{P}_{\leq x}$ die Menge der Primzahlen $p \leq x$. Zeigen Sie für $s > 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \lim_{x \to \infty} \prod_{p \in \mathcal{P}_{\leq x}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Hinweis: Zeigen Sie

$$\lim_{x \to \infty} \left| \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n^s} - \prod_{p \in \mathcal{P}_{\leq x}} \frac{1}{1 - p^{-s}} \right| = 0$$

durch Vergleich mit $\lim_{x \to \infty} \int_{x+1}^{\infty} \frac{1}{t^s} \mathrm{d}t$.

(4.2) Aufgabe: Quadratische Zahlkörper.

Es seien $d, d' \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ quadratfrei mit $d \neq d'$. Man zeige:

a) Es gilt $\mathbb{Q}[\sqrt{d}] \cap \mathbb{Q}[\sqrt{d'}] = \mathbb{Q}$.

b) Identität und Konjugation κ sind die einzigen Ringhomomorphismen $\mathbb{Q}[\sqrt{d}] \to \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$.

(4.3) Aufgabe: Lineare diophantische Gleichungen.
Seien $a_1, \dots, a_n, c \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

a) Die Gleichung $a_1X_1 + \ldots + a_nX_n = c$ besitzt genau dann eine ganzzahlige Lösung, wenn $\mathrm{ggT}_+(a_1, \dots, a_n) \mid c$.

b) Seien $\binom{x_1}{x_2}, \binom{y_1}{y_2} \in \mathbb{Z}^2$ Lösungen von $a_1X_1 + a_2X_2 = c$. Dann ist $\mathrm{ggT}_+(a_1, a_2) \cdot \binom{x_1-y_1}{x_2-y_2}$ ein ganzzahliges Vielfaches von $\binom{-a_2}{a_1}$.
Wie sieht also die Menge aller Lösungen aus?

c) Bestimmen Sie alle ganzzahligen Lösungen von $35X_1 + 21X_2 = 14$.

(4.4) Aufgabe: Größte gemeinsame Teiler.
Es seien $k, m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß

$$\mathrm{ggT}_+(k^m - 1, k^n - 1) = k^{\mathrm{ggT}_+(m,n)} - 1.$$

Abgabe: 10.05.2018 (Donnerstag), bis 10:00 Uhr.