Übungen zur Vorlesung Elementare Zahlentheorie (SS 18)

PD Dr. Jürgen Müller

(2.1) Aufgabe: Teilbarkeit.
a) Es seien R ein Integritätsbereich, $p \in R$ prim und $a \in R$. Man zeige: Es gilt entweder $p \mid a$, oder p und a sind teilerfremd. Welche Aussage erhält man daraus, wenn a ebenfalls prim ist?

b) Es seien R faktoriell, $a, b \in R \setminus \{0\}$ teilerfremd und $c \in R$. Man zeige: **i)** Es gilt $a \mid bc$ genau dann, wenn $a \mid c$ gilt. **ii)** Aus $a \mid c$ und $b \mid c$ folgt $ab \mid c$.

(2.2) Aufgabe: Legendre-Identität.
Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathcal{P}$. Man zeige: Es gilt $\nu_p(n!) = \sum_{i \geq 1} \lfloor \frac{n}{p^i} \rfloor$.

(2.3) Aufgabe: $\mathbb{Z}$ ist faktoriell.
Während zum Beweis der Existenz von Faktorisierungen nur die Multiplikation benutzt wird, wird für die Eindeutigkeit auch die Addition verwendet. Dies ist notwendig so, wie das folgende, auf Hilbert zurückgehende Beispiel zeigt:

a) Man zeige: Die Menge $\mathcal{H} := \{3k+1 \in \mathbb{N}; k \in \mathbb{N}_0\}$ ist ein multiplikatives Monoid. Man bestimme die Einheitengruppe von $\mathcal{H}$. Man gebe eine formale Definition von **Assoziiertheit** und von **unzerlegbaren** Elementen an.

b) Man zeige, daß jedes Element von $\mathcal{H}$ als Produkt unzerlegbarer Elemente geschrieben werden kann. Man untersuche diese Darstellungen auf Eindeutigkeit.

(2.4) Aufgabe: Satz von Euklid.
Der Beweis des Satzes von Euklid über die Unendlichkeit der Menge $\mathcal{P}$ der positiven Primzahlen legt folgende Konstruktion nahe: Für $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$ sei $p_{\min}(z) \in \mathcal{P}$ der kleinste Primteiler von z. Nun betrachte man die durch $p_1 := 2$ und $p_i := p_{\min}\big(1 + \prod_{j=1}^{i-1} p_j\big) \in \mathcal{P}$, für $i \geq 2$, rekursiv definierte Folge.

a) Man zeige: Die Primzahlen $p_1, p_2, \ldots$ sind paarweise verschieden.

b) Gilt möglicherweise sogar immer $p_i = 1 + \prod_{j=1}^{i-1} p_j$?

Abgabe: 27.04.2018 (Donnerstag), bis 10:00 Uhr.