

## Übungen zur Vorlesung Elementare Zahlentheorie (SS 18)

PD Dr. Jürgen Müller, Dr. Martin Bender

---

### (11.1) Aufgabe: Ganzzahlige Nullstellen.

Es sei  $f := X^4 + 25X^3 + 129X^2 + 60X + 108 \in \mathbb{Z}[X]$ .

a) Man untersuche die polynomielle Kongruenz  $f \equiv 0 \pmod{5^k}$  auf Lösbarkeit in  $\mathbb{Z}/5^k\mathbb{Z}$ , und bestimme gegebenenfalls alle Lösungen, für  $k \in \{1, \dots, 3\}$ .

b) Wie kann man daraus die Nullstellen von  $f$  in  $\mathbb{Z}$  bestimmen?

### (11.2) Aufgabe: Dezimaldarstellung.

Man bestimme die letzten drei Ziffern der Dezimaldarstellung von  $9^{9^9}$ .

### (11.3) Aufgabe: Satz von Euler.

Für teilerfremde  $a, n \in \mathbb{N}$  zeige man (ohne Benutzung des Satzes von Lagrange): Es gilt  $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ .

**Hinweis.** Man benutze die Abbildung  $\lambda_a: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n: x \mapsto ax \pmod{n}$ , und betrachte das Produkt über alle teilerfremden Reste modulo  $n$ .

### (11.4) Aufgabe: Primitivwurzeln.

Man bestimme alle Primitivwurzeln modulo  $p$ , für alle Primzahlen  $p < 50$ .