Übungen zur Vorlesung Elementare Zahlentheorie (SS 18)

PD Dr. Jürgen Müller

(1.1) Aufgabe: Pythagoräische Tripel.
Es sei $1 \neq n \in \mathbb{N}$ ungerade. Man zeige: Es gibt ein primitives pythagoräisches Tripel $[x, y, z] \in \mathbb{N}^3$ mit $y = n$. (Insbesondere gibt es also unendlich viele pythagoräische Tripel.)

(1.2) Aufgabe: Kommutative Ringe.
Es seien R und S kommutative Ringe, und $\varphi\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Man betrachte die folgenden rein formalen Eigenschaften (und erinnere sich an ähnliche Eigenschaften von Vektorraumhomomorphismen):

a) Man zeige: $\mathrm{Bild}(\varphi) := \{\varphi(a) \in S; a \in R\}$ ist abgeschlossen unter Addition und Multiplikation, und wird damit zu einem kommutativen Ring.

b) Man zeige: $\mathrm{Kern}(\varphi) := \{a \in R; \varphi(a) = 0\}$ ist abgeschlossen unter Addition, und wird damit zu einer additiven Gruppe.

c) Man zeige, daß $\mathrm{Kern}(\varphi)$ folgende Abgeschlossenheitseigenschaft bezüglich der Multiplikation hat: Sind $a \in \mathrm{Kern}(\varphi)$ und $b \in R$, so ist auch $ab \in \mathrm{Kern}(\varphi)$.

Insbesondere ist $\mathrm{Kern}(\varphi)$ also abgeschlossen unter Multiplikation. Aber: Wann wird $\mathrm{Kern}(\varphi)$ damit wieder zu einem kommutativen Ring?

(1.3) Aufgabe: Integritätsbereiche.
Es sei R ein *endlicher* kommutativer Ring.

a) Man zeige: Ist $0 \neq a \in R$, so ist a entweder eine Einheit oder ein Nullteiler.

b) Man folgere: Ist R ein Integritätsbereich, so ist ein Körper.

Hinweis. Für $a \in R$ betrachte man die Abbildung $\lambda_a\colon R \to R\colon x \mapsto ax$.

(1.4) Aufgabe: Kleinste gemeinsame Vielfache.
Es seien R ein Integritätsbereich, und $\emptyset \neq S \subseteq R$ eine Teilmenge. Man gebe eine formale Definition von **kleinsten gemeinsamen Vielfachen** der Elemente von S an, und formuliere eine Eindeutigkeitsaussage.

Abgabe: 19.04.2018 (Donnerstag), bis 10:00 Uhr.