# Übungen zur Vorlesung Elementare Zahlentheorie (SS 18)

PD Dr. Jürgen Müller

---

**(0.1) Aufgabe: Rechnen in kommutativen Ringen.**
Es seien $R$ ein kommutativer Ring, und $a, b \in R$. Man zeige:

**a)** Es gelten $0 \cdot a = 0$ und $(-1) \cdot a = -a$ und $-(ab) = (-a)b$.

**b)** Für $n \in \mathbb{N}$ gilt die **binomische Formel** $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$.

**(0.2) Aufgabe: Ringhomomorphismen.**
**a)** Es seien $R$ und $S$ kommutative Ringe, und $\varphi\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Man zeige, daß $\varphi(0_R) = 0_S$ gilt.

**b)** Man gebe ein Beispiel einer Abbildung $\varphi\colon R \to S$ zwischen kommutativen Ringen $R$ und $S$ an, die additiv und multiplikativ ist, aber $\varphi(1_R) \neq 1_S$ erfüllt.

**c)** Wieviele Ringhomomorphismen $R \to \{0\}$ bzw. $\{0\} \to R$ gibt es?

**(0.3) Aufgabe: Einheiten.**
Es seien $R$ ein kommutativer Ring, und $R^*$ die Menge der Einheiten in $R$.

**a)** Man zeige, daß es für $a \in R^*$ genau ein Element $a^{-1} \in R$ gibt mit $a \cdot a^{-1} = 1$. Man zeige, daß $R^*$ eine kommutative multiplikative Gruppe ist.

**b)** Für $a \in R^*$ und $n \in \mathbb{Z}$ gebe man eine formale Definition des Ausdrucks '$a^n$' an. Man beweise damit die folgenden Rechenregeln für Potenzen: Für $a, b \in R^*$ und $n \in \mathbb{Z}$ gelten $(a^{-1})^n = a^{-n}$ und $(ab)^n = a^n b^n$.

**(0.4) Aufgabe: Assoziiertheit.**
Man zeige: Assoziiertheit in einem Integritätsbereich ist eine Äquivalenzrelation.

---

**Abgabe:** Keine.