Prof. Dr. S. Orlik
Dr. M. Bender
BU Wuppertal
SS 2019

Abgabe bis 8.05.2019, 11h, in das
Postfach 110, Gebäude D.13

Übungen zur Vorlesung „Elementare Zahlentheorie“
Blatt 4

Sei $\zeta = e^{\frac{2pi}{3}} \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 1.

Sei

$$N : \mathbb{Z}[\zeta] - \{0\} \to \mathbb{N}, \quad x \mapsto x\overline{x},$$

wobei $\overline{z}$ das in $\mathbb{C}$ zu z konjugierte Element ist. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}[\zeta], N)$ ein euklidischer Ring ist.

(**Hinweis:** In der Vorlesung wurde gezeigt, dass der Ring $\mathbb{Z}[i]$ (mit entsprechender Normfunktion) euklidisch ist. Sie können den Beweis geeignet modifzieren.)

Aufgabe 2.

Bestimmen Sie jeweils für die Elemente x, y des euklidischen Ringes R einen grössten gemeinsamen Teiler und stellen Sie diesen als Linearkombination von x und y dar:

(a) $R = \mathbb{Z}[i], \quad x = 6 + 7i, \quad y = 11 + 4i.$

(b) $R = \mathbb{Z}[\zeta], \quad x = 1 + 3\zeta + 5\zeta^2, \quad y = 2 + 4\zeta + 6\zeta^2.$

Aufgabe 3.

Bestimmen Sie eine Zerlegung von 702 als ein Produkt von Primelementen in $\mathbb{Z}[i]$.

Aufgabe 4.

Zeigen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen p mit $p \equiv -1(\mod 3)$ gibt.