Prof. Dr. S. Orlik
Dr. M. Bender
BU Wuppertal
SS 2019

Abgabe bis 24.04.2019, 11h, in das
Postfach 110, Gebäude D.13

Übungen zur Vorlesung „Elementare Zahlentheorie“
Blatt 2

Aufgabe 1.

Sei G eine endliche Gruppe, $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Mit $[G : H]$ bezeichnen wir die Anzahl der Linksnebenklassen von H in G. Zeigen Sie, dass

$$\mid G \mid = [G : H] \cdot \mid H \mid .$$

Aufgabe 2.

Es sei $d \in \mathbb{Z}$ quadratfrei. Zeigen Sie, dass es für jedes $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ genau ein Paar $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ gibt mit

$$x = a + b \cdot \sqrt{d}.$$

Aufgabe 3.

Sei $R \subseteq \mathbb{C}$ ein Unterring und seien $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{C}$. Ferner sei S der durch R und $\{r_1, \ldots, r_n\}$ erzeugte Unterring von $\mathbb{C}$, d.h. S ist der kleinste Unterring von $\mathbb{C}$, welcher R und $r_1, \ldots, r_n$ enthält. Zeigen Sie, dass $S = \operatorname{im}(\iota)$, wobei ι der Einsetzungshomomorphismus

$$\iota : R[X_1, \ldots, X_n] \to \mathbb{C}, \quad f(X_1, \ldots, X_n) \mapsto f(r_1, \ldots, r_n)$$

ist.

Aufgabe 4.

Sei R ein Ring, kommutativ mit Einselement.

(a) Sei $I \subseteq R$ ein Ideal. Zeigen sie, dass R/I die Struktur eines kommutativen Ringes mit Einselement trägt.

(b) Seien $s \in R^\times$ eine Einheit, $r \in R$ irreduzibel und $p \in R$ prim. Zeigen Sie, dass rs irreduzibel und dass ps prim ist.

Aufgabe 5.

Sei $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}} \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie die Einheitengruppe $\mathbb{Z}[\rho]^\times$.