Prof. Dr. S. Orlik
Dr. M. Bender
BU Wuppertal
SS 2019

Abgabe bis 17.04.2019, 11h, in das
Postfach 110, Gebäude D.13

Übungen zur Vorlesung „Elementare Zahlentheorie“
Blatt 1

Aufgabe 1.

(a) Seien $p, q \in \mathbb{Z}_{>0}$ teilerfremd mit $p > q$ und nicht beide ungerade. Zeigen Sie, dass

$$(p^2 - q^2, 2pq, p^2 + q^2)$$

ein **primitives** pythagoreisches Tripel ist.

(b) Bestimmen Sie alle primitiven pythagoreischen Zahlentripel $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ mit $z < 85$.

Aufgabe 2.
Sei $f : G \to H$ ein Homomorphismus von Gruppen und sei $e_G \in G$ das neutrale Element. Zeigen Sie:

(a) Es ist $\ker(f) \subseteq G$ eine Untergruppe.

(b) Es ist f genau dann injektiv, wenn $\ker(f) = \{e_G\}$.

Aufgabe 3.
Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$X^n + Y^n = Z^n$$

für $n > 4$ höchstens endlich viele teilerfremde ganzzahlige Lösungen besitzt.
(Hinweis: Benutzen Sie den in der Vorlesung angegebenen Satz von Faltings.)

Aufgabe 4.
Sei $G = (G, \cdot)$ eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Zeigen Sie:

(a) Durch

$$g \sim g' \Leftrightarrow g^{-1} \cdot g' \in H$$

wird eine Äquivalenzrelation auf G definiert.

(b) Sei $G/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich der Relation $\sim$. Dann gibt es eine bijektive Abbildung $G/H \to G/\sim$.